Bases pour la trigonométrie

Mesures d'un angle Un angle $(\vec{u}, \vec{v})$ possède une infinité de mesures réelles, toutes de la forme $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. θ_0 est la mesure dite *principale* : c'est celle qui appartient à $]-\pi; \pi]$. On écrit indifféremment $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ ou $\theta = \theta_0(2\pi)$ (la dernière égalité se lisant $\theta = \theta_0$ *modulo* 2π).

Définition d'une rotation Notons r la rotation de centre Ω et d'angle α.

$$M' = r(M) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha \end{array} \right.$$

Propriétés

1. $(\vec{u}, \vec{v})+(\vec{v}, \vec{w})=(\vec{u}, \vec{w})$ (Relation de Chasles, Michel de son prénom)
2. Si $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$ alors
   (a) $(\vec{v}, \vec{u}) = -\theta$
   (b) $(\vec{u}, \vec{-v}) = \theta + \pi$
   (c) $(\vec{-u}, \vec{-v}) = \theta$

Cosinus et sinus La relation fondamentale est : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Equations trigonométriques

$$\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha(2\pi) \text{ ou } x = -\alpha(2\pi)$$

$$\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha(2\pi) \text{ ou } x = \pi - \alpha(2\pi)$$

Coordonnées polaires Soit M un point de coordonnées cartésiennes $(x; y)$ dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Dire que $(r; \theta)$ est un couple de coordonnées polaires de M correspond à dire que $OM = r$ et que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$. Les relations entre les deux systèmes de coordonnées sont : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.